"新工科建设"教学探索成果·"十三五"规划教材

微积分
同步练习与提高(三)

主　编　李莎莎　余琛妍

副主编　涂黎晖　王聚丰　孙海娜　翁云杰

主　审　苏德矿

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是与《微积分学》（下册）（吴正昌，蔡燧林，孙海娜编著）配套的学习辅导用书，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、常微分方程。

常微分方程在很多科学领域内有着重要的应用，如自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究等。这些问题都可以化为求常微分方程的解，或者化为研究解的性质的问题。本书研究了几类简单的常微分方程的解法。

本书的题目既包含“基础部分”，又包含“提高部分”，对强化学生的数学思维很有帮助。

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步练习与提高. 三/ 李莎莎, 余琛妍主编. — 北京：电子工业出版社，2018.3
ISBN 978-7-121-31977-8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①李… ②余… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 139737 号

策划编辑：章海涛　　　　文字编辑：孟　宇
责任编辑：章海涛
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　　印张：9.75　　字数：125 千字
版　　次：2018 年 3 月第 1 版
印　　次：2018 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：26.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：192910558（QQ 群）。

前　　言

信息安全与国家的军事、外交、政治、金融甚至我们的日常生活息息相关，已成为信息科学领域、社会科学领域重要的研究课题。数学基础犹如信息安全学科之根茎，支撑着信息安全领域的理论创新与技术进步。

微积分是高等学校工科类专业、经管类专业一门重要的数学基础课。能否用数学的思维、方法去思考、推理以及定量分析一些自然现象和经济现象，是衡量民族科学文化素质的重要标志，提高数学素养在培养高素质人才中有着不可替代的作用。

本书是与《微积分学》（下册）（吴正昌，蔡燧林，孙海娜编著）相配套的学习辅导用书，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、常微分方程。本书主要面向使用该教材的学生，也可供使用该教材的教师作为参考。本书分成三大部分：第一部分为基础题，根据《微积分学》的章节顺序和教学进度，选出适量的习题并留有解题空间作为作业供学生练习，同时也为老师批阅和学生复习提供了方便；第二部分为提高题，在原有的习题难度基础上，结合教材内容和考研大纲筛选出具有一定综合性的习题，并给出了详细的解题思路和解答过程，还提供了部分习题的多种解法，该部分可作为学有余力的学生提高数学解题能力的参考用书；第三部分为期中、期末样卷，可供学生复习备考之用。

本书的编写自始至终得到浙江大学宁波理工学院领导的支持和关怀，数学组全体老师对各章节习题进行了筛选、演算和校正，并提出了很多宝贵的意见，编者在此一并向他们表示衷心的感谢。

《微积分学》（下册）（吴正昌，蔡燧林，孙海娜编著）在浙江大学宁波理工学院和其他一些院校已经使用十多年，编写与该教材配套的用书是编者多年的心愿，现将长期教学实践积累的点滴写出来，为数学课程的学习带来更多的方便。由于对编写此类书缺乏经验，书中难免存在不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2018 年 2 月

浙江大学宁波理工学院

目　　录

第 9 章　向量代数与空间解析几何

§ 9.1　向量和向量运算

1．用向量方法证明平行四边形的对角线必互相平分。

§ 9.2　空间直角坐标系

2．已知三角形的三个顶点分别为 $A(1,5,0)$，$B(11,3,8)$，和 $C(5,11,12)$，求各中线之长。

3．已知 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ，A 点的坐标是$(0,5,3)$，求 B 点的坐标。

4．从点 $A(2,-1,7)$沿向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取一线段 AB，长为 34，求 B 点的坐标。

5．求下列各向量的模、方向余弦和与其同方向的单位向量。
（1） $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ；（2） $\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$ 。

6．已知向量$\boldsymbol{a}$的模为 5，与 x 轴正向的夹角是$\dfrac{\pi}{4}$，与 y 轴正向的夹角是$\dfrac{\pi}{3}$，求向量$\boldsymbol{a}$。

§9.3　标量积、向量积、混合积

7．已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=4$，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$。

8．已知$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$；（3）$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

9．已知$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$，求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$；（3）$(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$。

10．求向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$的夹角。

11．已知两点$M(4,\sqrt{2},1)$和$P(3,0,2)$，计算$\overrightarrow{MP}$的模、方向余弦和方向角，并证明$\overrightarrow{MP}$与$\overrightarrow{MO}$的夹角是锐角，其中O是坐标原点。

12．证明向量$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$与向量$\boldsymbol{c}$垂直。

13．已知三点$A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$，求三角形ABC的面积和AB上的高h。

14．已知$\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$，$\boldsymbol{b}\{1,-1,3\}$，$\boldsymbol{c}\{1,-2,0\}$，求：（1）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；（3）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$。

15．求与向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$都垂直的单位向量。

16．已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，求$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$。

17．设$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，求以$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$为边的平行四边形的面积。

18．设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，求向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角。

第 10 章　多元函数微分学

§ 10.1　平面点集多元函数

1．求下列函数的定义域。

（1） $z=\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$；（2） $z=\ln(y-x^2)+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 。

§ 10.2　二元函数的极限和连续性

2．判断下列函数在 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否存在极限，若存在，求极限值。

（1） $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$；（2） $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$；

（3） $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$；（4） $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ 。

§ 10.3　偏导数

3．求下列函数的偏导数。

（1） $z=\sqrt{(\ln(xy))}$；（2） $z=(1+xy)^y$；

（3） $u=\arctan(x-y)^z$；（4） $z=\mathrm{e}^x(\cos y+x\sin y)$。

4．设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$，求 $f_x'(1,1)$， $f_y'(1,2)$。

5．设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{4y}}$，求 $f_x'(2,1)$。

6．求下列函数的所有二阶偏导数。

（1） $u=x^4+y^4-4x^2y^2$；（2） $u=\ln(x^2+y)$。

7．设 $z=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$，验证下列等式等立。

（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$；（2） $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$。

8．设 $z=2\cos^2\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$，证明 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$。

§ 10.4 全微分

9．求下列函数的全微分。

（1） $z=\ln(x^2+y^2)$；（2） $z=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$；（3） $u=x^{yz}$ 。

10．求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，当 $x=1$， $y=2$ 时的全微分。

11．计算 $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$ 的近似值。

§ 10.5 复合函数的微分法

12．设 $u=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$， $y=a\sin x$， $z=\cos x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 。

13．设下面的 f 都有一阶连续偏导数，求下列函数的一阶偏导数。

（1） $u=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$；（2） $u=f(x,xy,xyz)$；（3） $u=f(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)$ 。

14．设 f 有连续二阶偏导数，$u=f(x+y,x-y)$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

15．设 f 有连续二阶偏导数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

16．设 f,φ 具有连续二阶偏导数或导数，$z=f(x+\varphi(y))$，证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

17．设 f 有连续偏导数，$u=f(x,y,z)$，$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$。

18．设 f 是可微函数，$u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$，证明 $\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$。

§ 10.6　隐函数求导

19．设 $x^2+y^2+z^2-6xz=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

20．设 $xyz=x+y+z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

21．设 $\mathrm{e}^z=x+y+z$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

22．设 $x-az=\varphi(y-bz)$，其中 a，b 为常数，φ 可导，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

23．设 $f(cx-az,cy-bz)=0$，其中 f 有连续偏导数，证明 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$。

24．设 z 是由方程确定的隐函数，求 dz。

（1） $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$；

（2） $x^2+y^2+z^2=f(ax+by+cz)$，其中 f 有连续偏导数，a，b，c 是常数。

25．设 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=f(x+u,yu)$ 确定，其中 f 有连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 。

§ 10.7　多元函数的极值

26．求下列函数的极值点。

（1） $z=x^2-xy+y^2-2x+y$ ；（2） $z=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 。

27．求函数 $z=x^2-y^2$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4\}$ 上的最大值，最小值。

28．设四个正数 a,b,c,d 的和为常数 4λ ，求乘积 $u=abcd$ 的最大值。

第 11 章　重积分

§ 11.1　二重积分的概念和性质

1．用二重积分的几何意义求下列积分值。

（1）$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$；

（2）$\iint\limits_D 3\,\mathrm{d}\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x+y\leqslant 1, y-x\leqslant 1, y\geqslant 0\}$。

2．根据二重积分性质，比较下列积分的大小。

$\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 2\}$。

§ 11.2　二重积分的计算

3．计算 $\iint\limits_D x^2y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x^2, x=1, y=0$ 所围的区域。

4．计算 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $xy=1, y=x, y=2$ 所围的区域。

5．计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y^2=x$ 与直线 $x+y=2$ 所围的区域。

6．交换下列二次积分的积分次序。

（1）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$；（2）$\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

（3）$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；（4）$\int_{-a}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^a \mathrm{d}x\int_{x-a}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$ 。

7．计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D \left|y-x^2\right|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$；

（2）$\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆周 $x^2+y^2=4$ 与 y 轴所围的右半闭区域。

8．计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为直线 $x=0, y=1, y=x$ 所围的区域。

9．用极坐标法计算下列二重积分。

（1）$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$， $D:\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$；

（2）$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$， $D:x^2+y^2\leqslant 2y$；

（3）$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$， $D:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, 0\leqslant y\leqslant x$；

（4）$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-4\right|\mathrm{d}\sigma$， $D:x^2+y^2\leqslant 9$。

10．求平面曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 所围成的面积。

11．计算以 xOy 平面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，且以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积。

第 12 章　常微分方程

§ 12.1　基本概念

1．验证函数 $y=-6\cos 2x+8\sin 2x$ 是方程 $y''+y'+\frac{5}{2}y=25\cos 2x$ 的解，且满足初始条件 $y|_{x=0}=-6$， $y'|_{x=0}=16$ 。

§ 12.2　可分离变量方程、齐次方程

2．求出下列可分离变量方程的解。

（1） $\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x+y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y=0$ ；（2） $2(x^2-1)yy'=(2x+3)(1+y^2)$ ；

（3） $\sin x\cos y-\ \ y'\cos x\sin y=0$ ；（4） $y'=\frac{2x\ln x+x}{\sin y+y\cos y}, y|_{x=1}=\frac{\pi}{2}$ ；

（5） $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{y})\mathrm{d}y=0$ 。

3．求下列齐次方程的解。

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$；（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$

§ 12.3　一阶线性微分方程

4．求下列线性方程的解。

（1）$y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$；

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-\dfrac{y}{x}$；

（3）$y'+2xy+x=\mathrm{e}^{-x^2}$，$y|_{x=0}=2$；

（4）$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x=\mathrm{e}^{2t}$；

（5）$\cos x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\sin x+\cos^2 x$。

§ 12.4　线性微分方程的一般理论

5．验证 x 和 e^x 都是方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的解，并写出该方程的通解。

§ 12.5　常系数线性微积分

6．求下列方程的解。

（1）$y''-4y'+3y=0$；

（2）$y''+2\sqrt{2}y'+2y=0$；

（3）$y''+2y'+3y=0$；

（4）$y''-5y'+4y=0,\ y|_{x=0}=5,\ y'|_{x=0}=8$；

（5）$y''+2y'+10y=0,\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=2$；

（6）$y''-4y'+4y=0,\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=1$。

7．求下列方程的解。

（1）$y''+y=x\mathrm{e}^{-x}$；

（2）$y''+6y'+5y=-10x+8$；

（3）$y''+2y'+y=2\mathrm{e}^{-x}$；

（4）$y''+4y=\cos 2x,\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=2$。

向量代数与空间解析几何提高题

1．三角形 ABC 是等腰三角形，$AB = AC$，用向量方法试证顶角 $\angle A$ 的外角平分线平行于底边 BC。

2．求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离。

3．设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意向量，证明 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$，试说明等式的几何意义。

4．设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$|\boldsymbol{c}|=7$。求 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角。

5．设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，证明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 平行。

6．设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$。

7．设 $\boldsymbol{a}=\{1,1,0\}$， $\boldsymbol{b}=\{1,0,1\}$，已知单位向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$ 共面且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{c}$。

8．设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，证明向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在实数 k，使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$。

多元函数微分学提高题

1．求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。

2．求 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ （a 为常数）。

3．求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$ 。

4．讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ，在点 $(0,0)$ 处的连续性。

5．设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值，$g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$。

6．设函数 $z=f\left[x^2,\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续导数，$\varphi(t)$ 具有二阶导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

7．设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，$f,\varphi$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}$。

8．设 $u=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中函数 f,g 具有二阶连续导数，求 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

9．设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$ 和 $g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

10．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的值。

11．设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{x}-y\mathrm{e}^{y}=z\mathrm{e}^{z}$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$ 。

12．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数且 $\varphi'\neq -1$ 。

（1）求 $\mathrm{d}z$；

（2）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 。

13．设 f 是可微函数，$f(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$ 。

14．设 f 可微，$x^2+y^2+z^2=yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$，证明 $(x^2-y^2-z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz$ 。

15．设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，且函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 和 $\mathrm{e}^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

16．设 $f(x,y,z)=0$， $z=g(x,y)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

17．求 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值。

18．设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

19．求函数 $z=x^2+y^2+2x+y$ 在区域 D： $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值与最小值。

20．已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$，并且 $f(1,1)=2$，求 $f(x,y)$ 在椭圆区域 $D=\left\{(x,y)\left|x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right.\right\}$ 上的最大值和最小值。

重积分提高题

1．求由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(\mathrm{e}+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积。

2．计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x, y=1, x=0$ 所围成的平面区域。

3．求 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$。

4．求 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$。

5．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$。求 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$。

6．计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}\sigma$ ，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 。

7．计算 $\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 D 是由直线 $y=x$ ， $y=-1$ 及 $x=1$ 围成的区域。

8．计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 是由 $x^2+y^2=x+y$ 围成的区域。

9．计算 $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$ ，D： $x^2+y^2\leqslant 1$ 。

10. 计算 $\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域。

11．计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$。

12．设 $D=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x+y\leqslant 2,xy\geqslant 0\}$，选择适当坐标系，计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}\sigma$。

13．计算二重积分 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant\pi\}$。

14．计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中 $D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$。

15．已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0,f(x,1)=0,\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

常微分方程提高题

1．求下列方程的解。

（1）$y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

（2）$\left(1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right)\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$；

（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x-2y}$；

（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cos y}{\cos y\sin 2y-x\sin y}$；

（5）$(x-2xy-y^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=0$；

2．求一曲线的方程，该曲线通过点 $(0,1)$ 且曲线上任一点处的切线垂直于此点与原点的连线。

3．求过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程。

4．做适当的变换求下列方程的通解。

（1）$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x+\sin(x+y)=0$；（2）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x-y}+1$；（3）$2yy'=\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{x}}+\frac{x^2+y^2}{x}-2x$；

5．设 $f(x)$ 是可微函数，并且满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$，求 $f(x)$。

6．设函数 $f(x)$ 可微且满足关系式 $\int_0^x[2f(t)-1]\mathrm{d}t=f(x)-1$，求 $f(x)$。

7．设函数 $f(t)$ 在 $[0.+\infty]$ 上连续，且满足方程 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $f(t)$。

8.设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$，求 $f(u)$。

《微积分（三）》课程期中考试样卷（一）

姓名____________学号____________考生所在学院____________专业班级____________

题序	一	二	三	总分
得分				

一、向量代数与空间解析几何（每题 8 分，共 32 分）

1．设点 $A(1,2,3)$、$B(-3,0,-1)$，求：（1）点 A 关于 xOy 平面对称点 A_{xy} 的坐标；（2）AB 中点 P 的坐标。

2．设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足：$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$。
求：（1）$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；（2）向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 之间的夹角 α

3．设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足：$|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=3$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$。
求：（1）$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；（2）当 k 取何值时，向量 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 垂直。

4．求过点 $M(1,2,3)$ 且与 $\boldsymbol{n}=\{1,2,3\}$ 垂直的平面方程。

二、多元函数微分学（第 1～3 题，每题 8 分；第 4～7 题，每题 10 分；共 64 分）

1．求极限：（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)}\dfrac{\ln(1+xy^2)}{\sin 3x}$；（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{|x|+|y|}$。

2．设 $f(x,y)=(x-1)^2\arctan(1+y^2)+(x-2)\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，求 $f_x'(2,0)$， $f_y'(2,0)$。

3．求函数 $z=\ln(1+x^3+y^3)$ 在点 $P(1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\,|_{(1,1)}$。

4．由方程 $x^3z+xy^2+\mathrm{e}^z=1$ 确定 $z=z(x,y)$，计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$。

5．设 $z=f\left(\dfrac{x}{y},x^2-y^2\right)$，且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

6．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & 其他\end{cases}$，证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续但偏导数不存在。

7．求函数 $z=x^2-2xy+2y^2-6x+4y+9$ 的极小值。

三、证明题（4 分）

设 $f\left(x-\dfrac{z}{y},y-\dfrac{z}{x}\right)=0$，且 f 具有一阶连续偏导数，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ 。

《微积分（三）》课程期中考试样卷（二）

姓名____________学号____________考生所在学院（系）_____________专业班级____________

题序	一	二	三	总分
题型				
得分				
评卷人				

一、简单计算（每题 7 分，共 28 分）

1．已知 $z = x^2 y - xy^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

2．设 $z = \arctan \dfrac{y}{x} + (1+xy)^y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \mathrm{d}z\big|_{(1,1)}$。

3． $z = (1+x+y)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

4、已知 $\boldsymbol{a} = \{2, -3, 1\}$， $\boldsymbol{b} = \{1, -1, 3\}$，求 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 夹角。

二、计算题（每题 8 分，共 64 分）。

1．求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)$ 的极值点和极值。

2．已知函数 $z=(x^2+y^2)f(\mathrm{e}^{x+y})$，$f$ 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\mathrm{d}z$ 。

3．已知 $z=f(x^2y,xy^2)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 。

4．已知方程 $\mathrm{e}^z=xyz$ 确定了 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

5．已知 $z=f(x^2+y^2,x^2-y^2)$，f 有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 。

6．方程 $\ln(x^2+z^2)=x+y+z$ 确定 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 。

7．已知$u=f(x,y,z)$， $z=g(x,y)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$。

8．设$z=\int_{y}^{x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

三、证明题（8 分）。

设f，φ具有连续的二阶偏导数， $z=f(x+\varphi(y))$，证明$\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

《微积分（三）》课程期中考试样卷（三）

姓名____________学号____________考生所在学院____________专业班级____________

题序	一	二	三	总分
题型				
得分				
评卷人				

一、简单计算（每题 6 分，共 60 分）。

1．设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}+(1+xy)^{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

2．已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$，求 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$。

3．已知 $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$，其中 f 有二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

4．已知方程 $\mathrm{e}^x=x+y-z$ 确定了 $z=z(x,y)$，且 $z=z(x,y)$ 可微，求 $\mathrm{d}z$。

5．已知 $z=f\left(x^2+\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

6．设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的值。

7．设 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，并求 $(0,0)$ 处的一阶偏导数值。

8．设 $z(x,y)=\int_{y^2}^{x^2}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

9．设 $z=f(x^2+y^2,\varphi(xy))$，求 $\mathrm{d}z$。

10．设 $z=\dfrac{(x-2y)^2}{2x+y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

二、综合计算（每题 10 分，共 40 分）

1．设 $u=f(x,y,z)$， $\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$， $y=\sin x$，其中 f， φ 具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$。

2．求 $f(x,y)=4x-4y-x^2-y^2$ 的极值。

3．设 $f(x,y,z)=0$， $z=g(x,y)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$。

4．设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x， y 的函数，其中 $f(u)$， $\varphi(u)$ 可微， $p(t)$， $\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

《微积分（三）》课程期末考试样卷（一）

姓名__________学号__________考生所在学院__________专业班级__________

题序	一	二	三	总分
题型	简单计算题	综合计算题	证明题	
得分				
评卷人				

一、简单计算（每题 5 分，共 25 题）。

1．$z = \mathrm{e}^{x^3+y^2}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\mathrm{d}z$。

2．$z = (1+xy)^y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

3．已知 $\boldsymbol{a} = \{1,1,-4\}$， $\boldsymbol{b} = \{1,-2,2\}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 夹角。

4．已知 $z = f(x^2+y^2, x^2-y^2)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

5．交换累次积分 $\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^{3}}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序。

二、综合计算题（每题 7 分，共 70 分）

1．方程 $\mathrm{e}^{z}=xyz$ 确定 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

2．计算二重积分 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x^{2}$ 和 $y=x$ 围成。

3．解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x$。

4．计算二重积分 $\iint\limits_{D}\left|x^{2}+y^{2}-1\right|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^{2}+y^{2}\leqslant 4\}$。

5．求 $\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-y^{2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为直线 $x=0$，$y=1$，$y=x$ 所围成的区域。

6．已知 $z=f(x+y,xy)$，f 有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

7．求方程 $y''-y=4x\mathrm{e}^x$ 的解。

8．求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x-y}$ 的通解。

9．设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}+1$，求 $f(x)$ 的表达式。

10．计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2x\}$。

三、证明题（5 分）

已知 $z=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，证明 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$。

《微积分（三）》课程期末考试样卷（二）

姓名____________学号____________考生所在学院____________专业班级___________

<table>
<tr><td rowspan="2">题序</td><td rowspan="2">一
填空题</td><td rowspan="2">二
选择题</td><td colspan="6">三</td><td>总分</td></tr>
<tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>评卷人</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、判断题（每题 3 分，共 15 分，请在括号内将你认为正确的打 √，错误的打×）

1. 若函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微。（　　）

2．函数 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处连续。（　　）

3．设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为三个非零向量，若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。（　　）

4. 若 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$。（　　）

5. 若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to 0}\dfrac{\phi(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{(0,0)}$。（　　）

二、填空题（每题 4 分，共 28 分）

6．方程 $y''=y$ 的通解为________。

7．设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=3$ 所确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=$________。

8．向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$________。

9．设 $f(x,y)=x+xy^2+\mathrm{e}^{x\sin y}$，则 $f_x'(1,0)$________。

10．计算 $\iint\limits_{x^2+y^2=1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________。

11．函数 $f(x,y)=2x^2+ax+bxy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 处取得极值，则 $\boldsymbol{a}=$__________，$\boldsymbol{b}=$________。

12．微分方程 $(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$ 的通解为________。

三、解答题（共 57 分，需要写出演算步骤或证明过程。）

13．（10 分）计算由极坐标曲线 $r^2=\cos(2\theta)$ 所围的平面区域 D 的面积。

14．（10 分）已知 $z=(x^2+y^2)^x$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

15．（10 分）求二重积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-1}^1 (1+y)x^y \mathrm{d}y$。

16．（10 分）设 $F(u,\upsilon)$ 有连续的一阶导数，$F(1.0)=0$，$F_u'(1,0)=F_v'(1,0)=1$。函数 $y=y(x)$ 是方程 $F(x^2-y^2,\mathrm{e}^x\ln(1+y))=0$ 在点 $(1,0)$ 附近所确定的隐函数，计算 $y'(1)$。

17．（9 分）求一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2\cos x$ 的通解。

18．（8 分）求二阶常系数齐次微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=5$ 的解。

《微积分（三）》课程期末考试样卷（三）

姓名____________学号____________考生所在学院____________专业班级___________

题序	一	二 1～3 题	二 4～6 题	二 7～9 题	二 10～12 题	总分
题型						
得分						
评卷人						

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1．设向量 $\boldsymbol{a}=\{2,3,-1\}$ 与 $\boldsymbol{b}=(3,k,4)$ 垂直，则 $k=$________。

2．设向量 $\boldsymbol{a}=\{1,2,0\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{3,5,2\}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$________。

3．极限 $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{4+xy}-2}{xy}=$________。

4．设函数 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，则 $f''_{xz}(4,-1,2)=$________。

5．设函数 $\varphi(u)$ 可导，$z=\varphi(x^2+y^2)$，则 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________。

6．设函数 $u=xyz$，则全微分 $\mathrm{d}u=$________。

7．交换累次积分 $I=\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 的次序，则 $I=$________。

8．设闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,(x-2)^2+y^2\leqslant 4\}$，则二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=$________。

9．微分方程 $y''-4y'=0$ 的通解为 $y=$________。

10．微分方程 $y''=\dfrac{1}{x^2}$ 通解为 $y=$________。

二、运算题（应写出必要的解题步骤，共 12 题；第 1~11 题，每题 6 分；第 12 题 4 分，共 70 分）

1．设 $M_1(0,1,2)$，$M_2(2,-1,3)$ 是空间的两点，求与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相反，模为 6 的向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式。

2．设向量 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{17}$，求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$。

3．设函数 $z=\mathrm{e}^{x^2y+\frac{1}{y}}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

4．设函数 $z=\arctan\dfrac{u}{v}$， $u=xy$， $v=x^2+y^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v},\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

5．设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $z=f(x,xy^2)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

6．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^3+z^3-yz=1$ 所确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

7．求函数 $f(x,y)=4(x-y)-2(x-1)^2-y^2$ 的极值（要判断是极大值还是极小值）。

8．计算二重积分 $\iint\limits_D xy^3\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2=2x$ 及直线 $y=x$ 所围成的平面有界闭区域。

9．计算二重积分$\iint\limits_{D}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant\pi, y\geqslant 0\}$。

10．求微分方程$xy\mathrm{d}y=\sqrt{1+y^2}\mathrm{d}x$满足初始条件$y|_{x=1}=0$的特解。

11．求微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x+1}y=x+1$的通解。

12．设函数$f(x,y)$连续，且$f(x,y)=x^2+y^2-3\iint\limits_{D}f(2x,2y)\mathrm{d}\sigma$，其中二重积分的区域$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，求$f(x,y)$。

第9章　向量代数与空间解析几何答案

1．略。

2．$\sqrt{153}$，$\sqrt{93}$，$\sqrt{114}$。

3．$(3,6,2)$。

4．$(18,17,-17)$。

5．（1）3，$\boldsymbol{a}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right\}$；

（2）17，$\boldsymbol{b}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left\{\frac{8}{17},\frac{-9}{17},\frac{12}{17}\right\}$；

6．$\left\{\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5}{2},\pm\frac{5}{2}\right\}$。

7．$-\frac{29}{2}$。

8．（1）-6；（2）9；（3）-61。

9．（1）22；（2）36；（3）0。

10．$\frac{3}{4}\pi$

11．模：2，方向余弦：$-\frac{1}{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1}{2}$，方向角：$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$。

12．略。

13．$\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$，$\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\Big/\sqrt{a^2+b^2}$。

14．（1）$\{0,-8,-24\}$；（2）$\{-8,-5,1\}$；（3）$\{16,10,-2\}$

15．$\pm\frac{1}{\sqrt{194}}\{1,-7,12\}$。

16．$\sqrt{3}$。

17．30.

18．$\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$。

第 10 章　多元函数微分学答案

1．（1）$\{(x,y)\mid x^2\geqslant 1, y^2\geqslant 1\text{或}x^2\leqslant 1, y^2\leqslant 1\}$；（2）$\{(x,y)\mid y>x^2, x^2+y^2\leqslant 1\}$。

2．（1）存在极限，0；（2）不存在极值；（3）存在极限，0；（3）不存在极限。

3．（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln xy}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln xy}}$；

（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left(\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right)$；

（3）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$；

（4）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x[\cos y+(x+1)\sin y]$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^x(x\cos y-\sin y)$。

4．$f'_{x(1,1)}=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{2}$，$f'_{y(1,2)}=\dfrac{4}{15}\sqrt[3]{5}$。

5．1。

6．（1）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-16xy$；

（2）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2(y-x^2)}{(y+x^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{-1}{(y+x^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{2x}{(y+x^2)^2}$。

7，8．略。

9．（1）$\dfrac{2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$；（2）$\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}$；（3）$yzx^{yz-1}\mathrm{d}x+x^{yz}z\ln x\mathrm{d}y+x^{yz}y\ln x\mathrm{d}z$。

10．$\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x+\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$。

11．2.95。

12．$\mathrm{e}^{ax}\sin x$。

13．（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}f_2'$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2yf_1'+x\mathrm{e}^{xy}f_2'$；

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xf_2'+xzf_3'$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xyf_3'$；

（3）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xf_1'+2xf_2'+2yf_3'$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2yf_1'-2yf_2'+2xf_3'$。

14．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+2f''_{12}+f''_{22}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''_{11}-2f''_{12}+f''_{22}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{11}-f''_{22}$。

15．$4xyf''(x^2+y^2+z^2)$。

16．略。

17． $\dfrac{\partial f}{\partial x}+2t\dfrac{\partial f}{\partial y}+3t^2\dfrac{\partial f}{\partial z}$ 。

18．略。

19． $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3z-x}{z-3x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{z-3x}$ 。

20． $\dfrac{2(x+y)}{(xy-1)^3}$ 。

21． $-\dfrac{\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z-1)^3}$ 。

22． $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{a-b\varphi'(y-bz)}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\varphi'(y-bz)}{b\varphi'(y-bz)-a}$ 。

23．略。

24．（1） $\dfrac{1}{6z-y}[-2x\mathrm{d}x+(4y+z-1)\mathrm{d}y]$；

（2） $\dfrac{1}{2z-cf'}[(af'-2x)\mathrm{d}x+(bf'-2y)\mathrm{d}y]$ 。

25． $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{f_1'}{1-f_1'-yf_2'}$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{uf_2'}{1-f_1'-yf_2'}$ 。

26．（1）极小点 $(1,0)$；（2）极小点 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$。

27．最大值 4，最小值 -4 。

28． λ^4 。

第 11 章　重积分答案

1.（1）$\frac{2}{3}\pi$；（2）3。

2. $\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma < \iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$。

3. $\frac{1}{14}$。

4. $\frac{27}{64}$。

5. $-\frac{45}{8}$。

6.（1）$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$；（2）$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；（4）$\int_a^0 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{y+a} f(x,y)\mathrm{d}x$。

7.（1）$\frac{11}{30}$；（2）$\frac{64}{15}$。

8. $\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$。

9.（1）$-6\pi^2$；（2）$\frac{3}{2}\pi$；（3）$\frac{3\pi^2}{64}$；（4）$\frac{41}{2}\pi$。

10. πab。

11. $\frac{2}{32}\pi a^4$。

第 12 章　常微分方程答案

1．略。

2．（1） $\arcsin x-\sqrt{1-y^2}=c(及 y=\pm 1)$；

（2） $y^2=c(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1$；

（3） $\cos y=c\cos x$；

（4） $y\sin y=x^2\ln x+\dfrac{\pi}{2}$；

（5） $(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^y-1)=c$。

3．（1） $x^2-y^2=cy(及 y=0)$；

（2） $y=x\mathrm{e}^{cx}$。

4．（1） $y=\dfrac{1}{x}(-\cos x+c)$；

（2） $y=\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{c}{x}$；

（3） $y=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}-\dfrac{1}{2}$；

（4） $x=c\mathrm{e}^{-3t}+\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{2t}$；

（5） $y=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{\cos x}\left(\dfrac{x}{2}+c\right)$。

5． $y=c_1x+c_2\mathrm{e}^x$。

6．（1） $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{3x}$；

（2） $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$；

（3） $y=\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$；

（4） $y=4\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{4x}$；

（5） $y=\mathrm{e}^{-x}(\cos 3x+\sin 3x)$；

（6） $y=(1-x)\mathrm{e}^{2x}$。

7．（1） $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\dfrac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{-x}$；

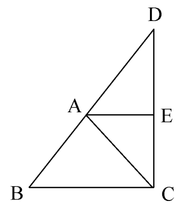
（2） $y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{-5x}-2x+4$；

（3） $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{-x}+x^2\mathrm{e}^{-x}$；

（4） $y=\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)\sin 2x$。

向量代数与空间解析几何提高题答案

1．证：如解题图 1 延长 BA 使 $BA=AD$，连接 DC，AE 平分 $\angle CAD$ 交 CD 于点 E。



解题图 1

因为 $AB=AC$，$AB=AD$，得 $AC=AD$，又因为 $\angle CAE=\angle DAE$，$AE=AE$，因此 $\triangle CAE\cong\triangle DAE$，得 $CE=DE$，所以 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$。又 $BA=AD$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$。

因此，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})$，即 $\overrightarrow{AE}//\overrightarrow{BC}$ 且 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$。

这就证明了顶角 $\angle A$ 的外角平分线平行于底边 BC。

2．解：过点 M 向各坐标轴作垂线的垂足依次是：$N_1=(4,0,0),N_2=(0,-3,0)$，$N_3=(0,0,5)$。因此 M 到各坐标轴的距离依次为：$\mathrm{d}x=|N_1M|=\sqrt{0+(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$；$\mathrm{d}y=|N_2M|=\sqrt{4^2+0+5^2}=\sqrt{41}$；$\mathrm{d}z=|N_3M|=\sqrt{4^2+(-3)^2+0}=5$。

3．证：$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=2\left(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2\right)$$

几何意义：平行四边形对角线的平方和等于四条边的平方和。

4．解：由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{c}|^2=-49$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-49$。

同理，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{b}|^2=-25$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-25$。

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=-|\boldsymbol{a}|^2=-9$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-9$。

因此，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{15}{2}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{65}{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{33}{2}$，

$$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{15}{2}}{15}=\frac{1}{2}，得<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\pi}{3}。$$

5．证：设：因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}$

$$=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}，$$

由定理 9.1，得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 平行。

6．证：由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，

因此 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$。

同理，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$。得证。

7．解：由 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面，得 $\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

令 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\{1,-1,-1\}$。

又 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{c}$ 必平行于 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$。

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=\{1,2,-1\}$。

得到 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$ 方向的单位向量是 $\dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\{1,2,-1\}$。

所以，单位向量 $\boldsymbol{c}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\{1,2,-1\}$。

8．证：充分性显然成立；

必要性，设 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$，取 $|\boldsymbol{k}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 k 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 k 取负值，即有 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$。

因为，此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$。

多元函数微分学提高题答案

1．解：令 $t=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2}=\frac{1}{6}。$$

2．解：$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}}=\mathrm{e}$。

3．解：由于 $0\leqslant\left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right|\leqslant\left|\dfrac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)\right|$，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)\overset{令x^2+y^2=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t^2}{4}\ln t=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln t}{\frac{1}{t^2}}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}}=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\mathrm{e}^0=1$。

4．解：当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，由于 $f(x,y)$ 是初等多元函数，在 $(x,y)\neq(0,0)$ 点有意义，所以 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 点连续。

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}}\dfrac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}=\dfrac{k}{1+k^2}=\begin{cases}0, & k=0\\ 1, & k=1\end{cases}$。所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续。

5．解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot yg'(x)$，因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，所以 $g'(1)=0$。则

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=f_1'[y,yg(1)]\cdot y=f_1'(y,y)\cdot y$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}}=\frac{\partial}{\partial y}[f_1'(y,y)\cdot y]\Big|_{y=1}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$$

6．解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\varphi'\cdot\dfrac{y}{x^2}$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\left(f_{12}''\cdot\varphi'\cdot\frac{1}{x}\right)+\left(f_{22}''\cdot\varphi'\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\varphi'\cdot\frac{-y}{x^2}+f_2'\cdot\varphi'\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{x^2}+f_2'\cdot\varphi'\cdot\frac{-1}{x^2}。$$

7．解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2}f+\dfrac{1}{x}f'\cdot y+y\varphi'$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'\cdot x+\frac{1}{x}\cdot[yf''\cdot x+f']+\varphi'+y\varphi''=yf''+\varphi'+y\varphi''。$$

8．解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf'\cdot\dfrac{1}{y}+g+xg'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=f'+g-\dfrac{y}{x}g'$；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)-y\left[-\frac{1}{x^2}g'+\frac{1}{x}g''\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{y}f''+\frac{y^2}{x^3}g''；$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)-\frac{y}{x^2}g''$；所以 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$。

9．解：$\frac{\partial g}{\partial x}=yf_1'+xf_2'$，$\frac{\partial g}{\partial y}=xf_1'-yf_2'$，记 $f_1'=\frac{\partial f}{\partial u}$，$f_2'=\frac{\partial f}{\partial v}$。

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$；$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}$；

所以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=x^2+y^2$。

10．解：对等式两边微分，有

$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{2x-3z}(2\mathrm{d}x-3\mathrm{d}z)+2\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}z=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}x+\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}y$$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$。所以 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2$。

11．解：$\begin{cases}\mathrm{d}u=f_1'\mathrm{d}x+f_2'\mathrm{d}y+f_3'\mathrm{d}z\\(1+z)\mathrm{e}^z\mathrm{d}z=(1+x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\end{cases}$，则 $\mathrm{d}u=\left[f_1'+\frac{(1+x)\mathrm{e}^x}{(1+z)\mathrm{e}^z}f_3'\right]\mathrm{d}x+\left[f_2'-\frac{(1+y)\mathrm{e}^y}{(1+z)\mathrm{e}^z}f_3'\right]\mathrm{d}y$。

12．解：（1）方程两边同时求全微分，得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$$

$$\mathrm{d}z=\left(\frac{2x-\varphi'}{\varphi'+1}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{2y-\varphi'}{\varphi'+1}\right)\mathrm{d}y$$

（2）由（1）可知 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-\varphi'}{\varphi'+1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-\varphi'}{\varphi'+1}$，$u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{2}{\varphi'+1}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2\frac{\varphi''\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''\cdot(2x+1)}{(\varphi'+1)^3}$$

13．解：方程两边同时微分，得

$$f_1'\cdot\left[\mathrm{d}x+y^{-1}\mathrm{d}z-zy^{-2}\mathrm{d}y\right]+f_2'\cdot\left[\mathrm{d}y+x^{-1}\mathrm{d}z-zx^{-2}\mathrm{d}x\right]=0$$

$$\mathrm{d}z=\frac{zx^{-2}f_2'-f_1'}{y^{-1}f_1'+x^{-1}f_2'}\mathrm{d}x+\frac{zy^{-2}f_1'-f_2'}{y^{-1}f_1'+x^{-1}f_2'}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zx^{-2}f_2'-f_1'}{y^{-1}f_1'+x^{-1}f_2'}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zy^{-2}f_1'-f_2'}{y^{-1}f_1'+x^{-1}f_2'}$$

$\text{左边}=\frac{z(y^{-1}f_1'+x^{-1}f_2')-(xf_1'+yf_2')}{y^{-1}f_1'+x^{-1}f_2'}=z-xy=\text{右边}$，得证。

14，解：方程两边同时微分，得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=f\mathrm{d}y+yf'\cdot\frac{y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y}{y^2}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{2x}{f'-2z}\mathrm{d}x+\frac{2y-f+\frac{z}{y}f'}{f'-2z}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'-2z}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-f+\frac{z}{y}f'}{f'-2z}$$

左边 $=\dfrac{2x(x^2-y^2-z^2)+2xy\left(2y-f+\frac{z}{y}f'\right)}{f'-2z}=\dfrac{2xz(f'-2z)}{f'-2z}=$ 右边，得证。

15．解：方程两边关于 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')+(y+xy')=0，\text{则 } y'=-\frac{y}{x}$$

$$\mathrm{e}^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot(1-z')，\text{则 } z'=1-\frac{(x-z)\mathrm{e}^{x}}{\sin(x-z)}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cdot y'+f_3'\cdot z'=f_1'-\dfrac{y}{x}f_2'+\left(1-\dfrac{(x-z)\mathrm{e}^{x}}{\sin(x-z)}\right)f_3'$。

16．解：方程两边同时微分，得

$$\begin{cases} f_1'\mathrm{d}x+f_2'\mathrm{d}y+f_3'\mathrm{d}z=0 \\ dz=g_1'\mathrm{d}x+g_2'\mathrm{d}y \end{cases}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{f_1'+f_3'g_1'}{f_2'+f_3'g_2'},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f_2'g_1'-f_1'g_2'}{f_2'+f_3'g_2'}$。

17．解：$\begin{cases} f_x'=2x(2+y^2) \\ f_y'=2x^2y+\ln y+1 \end{cases}$，令 $\begin{cases} f_x'=0 \\ f_y'=0 \end{cases}$，得唯一驻点 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$。

由于 $A=f_{xx}''\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=2\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$，$B=f_{xy}''\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$，$C=f_{yy}''\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}$，则 $B^2-AC=-2\mathrm{e}\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)<0$，且 $A>0$。从而 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值，极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。

18．解：方程两边对 x 求导，得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad ①$$

方程两边对 y 求导，得

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad ②$$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x-3y=0 \\ -3x+10y-z=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x=3y \\ z=y \end{cases}$，代入原方程得 $\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-9 \\ y=-3 \\ z=-3 \end{cases}$。

再求 $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{1}{6}$， $B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\dfrac{1}{2}$， $C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{5}{3}$。

因为 $AC-B^2>0$， $A>0$，所以 $(9,3)$ 为 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$。

类似地， $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\dfrac{1}{6}$， $B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=\dfrac{1}{2}$， $C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\dfrac{5}{3}$。

故 $AC-B^2>0$， $A<0$，则 $(-9,-3)$ 为 $z(x,y)$ 的极大值点。极大值为 $z(-9,-3)=-3$。

19．解：由于函数在区域 D 上连续，故必有最大值和最小值。

$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+2=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+1=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=-1\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$， $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\notin D$，舍去。

函数在 D 内部无驻点，考虑在 D 边界 $x^2+y^2=1$ 上的条件极值点，作拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=1+2x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$。

$$\begin{cases}L'_x=2+2\lambda x=0\\ L'_y=1+2\lambda y=0\\ L'_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}，得 \begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt5}\\ y=\dfrac{1}{\sqrt5}\end{cases}，或 \begin{cases}x=-\dfrac{2}{\sqrt5}\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt5}\end{cases}。$$

由于 $z\left(\dfrac{2}{\sqrt5},\dfrac{1}{\sqrt5}\right)=1+\sqrt5, z=\left(-\dfrac{2}{\sqrt5},-\dfrac{1}{\sqrt5}\right)=1-\sqrt5$，所以函数的最小值 $m=1-\sqrt5$，最大值 $M=1+\sqrt5$。

20．解：$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y\end{cases}$ 在 D 内部有驻点 $(0,0)$，且为了求 $f(0,0)$ 的值，就先要求 $f(x,y)$ 的表达式。

由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$，设 $f(x,y)=x^2+c(y)$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$，则 $f(x,y)=x^2-y^2+c$。

已知 $f(1,1)=2$，则 $c=2$。$f(x,y)=x^2-y^2+2$， $f(0,0)=2$。再考虑在 D 边界 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上函数的最值。

作拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\dfrac{y^2}{4}-1\right)$，则

$$\begin{cases}L'_x=2x+2\lambda x=0\\ L'_y=-2y+\dfrac{1}{2}\lambda y=0\\ L'_\lambda=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0\end{cases}$$

求得驻点 $(0,2),(0,-2),(1,0),(-1,0)$。

计算对应 z 的值，$z|_{(0,2)}=-2$，$z|_{(0,-2)}=-2$，$z|_{(1,0)}=3$，$z|_{(-1,0)}=3$。得到 $z_{\min}=z(0,\pm2)=-2$，$z_{\max}=3$。

重积分提高题答案

1．解：$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^{y}}^{\mathrm{e}+1-y}\mathrm{d}x$

$=\int_{0}^{1}(\mathrm{e}+1-y-\mathrm{e}^{y})\mathrm{d}y$

$=\dfrac{3}{2}$

2．解：$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant y\}$

$\iint\limits_{D}\sqrt{y^{2}-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}\sqrt{y^{2}-xy}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{2}{3}\int_{0}^{1}\sqrt{y}(y-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{y}\mathrm{d}y$

$=\dfrac{2}{3}\int_{0}^{1}y^{2}\mathrm{d}y$

$=\dfrac{2}{9}$

3．解：$\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^{2}}^{y}\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$

$=\int_{0}^{1}(1-y)\sin y\mathrm{d}y$

$=1-\cos 1+y\cos y\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\cos y\mathrm{d}y$

$=1-\sin 1$

4．解：$\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_{2}^{4}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$

$=\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y}^{y^{2}}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x$

$=\int_{1}^{2}\left[-\dfrac{2y}{\pi}\cos\dfrac{\pi x}{2y}\Big|_{y}^{y^{2}}\right]\mathrm{d}y$

$=-\dfrac{2}{\pi}\int_{1}^{2}y\cos\dfrac{\pi}{2}y\mathrm{d}y=-\dfrac{4}{\pi^{2}}\left[y\sin\dfrac{\pi}{2}y\Big|_{1}^{2}-\int_{1}^{2}\sin\dfrac{\pi}{2}y\mathrm{d}y\right]$

$=\dfrac{4}{\pi^{2}}-\dfrac{8}{\pi^{3}}\cos\dfrac{\pi}{2}y\Big|_{1}^{2}$

$=\dfrac{4}{\pi^{2}}-\dfrac{8}{\pi^{3}}$ 。

5．解：解法一：更换积分次序，可得

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y&=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\\&=A^2\end{aligned}$$

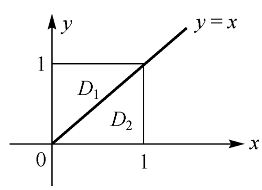
所以 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}A^2$ 。

解法二：记函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，则 $F(0)=0$ ， $F(1)=A$ ， $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}F(y)\\&=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 Af(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x\\&=A^2-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x)\\&=A^2-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1\\&=A^2-\frac{1}{2}[F^2(1)-F^2(0)]\\&=\frac{1}{2}A^2\end{aligned}$$

6．解：

$$\begin{aligned}&\iint_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y+\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}-1\end{aligned}$$



7．解：$\iint_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_y^1 y\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 y(1-y)\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\iint_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-1}^1 y\mathrm{d}y\int_y^1 x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^1 y\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1+y^2)}-\mathrm{e}^{y^2}\right]\mathrm{d}y\\&=0\end{aligned}$$

于是 $\iint\limits_D y\left[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\dfrac{2}{3}$

8．解：$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}r^2\mathrm{d}r$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}[(1+2\sin\theta\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sin\theta-\cos\theta+\frac{2}{3}\sin^3\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{9}\sqrt{2}$$

9．解：$\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-r^2}{1+r^2}}r\mathrm{d}r$

$$=\pi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\mathrm{d}(r^2)$$

$$\underline{\underline{令r^2=\sin t}}\ \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{1+\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{1+\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

10．解：$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant -2a\sin\theta,-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0\right\}$

$$I=\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

令 $r=2a\sin t$，有

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-\theta}2a^2(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)$$

11．解：设 $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,(x,y)\in D\}$， $D_2=\{(x,y)|x^2+y^2>1,(x,y)\in D\}$，

$$\iint_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma = -\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (r^2-1)r\mathrm{d}r + \iint_D (x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{8} + \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 (x^2+y^2-1)\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (r^2-1)r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$$

12．解：$\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}} r\mathrm{d}r$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{3}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}} \mathrm{d}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}(\mathrm{e}-1)$$

13．解：$\displaystyle I = \mathrm{e}^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-r^2}\sin r^2\, r\mathrm{d}r$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\pi}}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-r^2}\sin r^2\,\mathrm{d}r^2$$

$$\xlongequal{\text{令}t=r^2} \frac{\mathrm{e}^{\pi}}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= \pi\mathrm{e}^{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$$

记 $A = \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$，则

$$A = \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\cos t = -\left(\mathrm{e}^{-t}\cos t\big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-\pi} + 1 - \mathrm{e}^{-t}\sin t\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{-\pi} + 1 - A$$

有 $A = \dfrac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}$，所以 $I = \dfrac{\pi\mathrm{e}^{\pi}}{2}(1+\mathrm{e}^{-\pi}) = \dfrac{\pi}{2}(1+\mathrm{e}^{\pi})$。

14．解：$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$=\iint\limits_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2}{3}(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin\theta}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3\times 1}{4\times 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$

15．解：因为 $f(x,1)=0$， $f(1,y)=0$，所以 $f_x'(x,1)=0$

$I=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf_{xy}''(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}(f_x'(x,y))$

$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\left[yf_x'(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f_x'(x,y)\mathrm{d}y\right]$

$=-\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f_x'(x,y)\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\mathrm{d}(f(x,y))$

$=-\int_0^1\mathrm{d}y\left[xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]$

$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$

常微分方程提高题答案

1．（1）解：方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}=\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x}-1}$，即为齐次方程。令 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，则方程变换为 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2}{u-1}$，分离变量有 $\dfrac{u-1}{u}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，两边积分得 $u-\ln|u|=\ln|x|+\ln|c|$，即 $\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}=cx$，将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，得原方程的通解为 $\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}=cy$，即 $y=c\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$。

（2）解：方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{x}{y}-1\right)}{1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}}$，令 $\dfrac{x}{y}=u$，则 $x=yu$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，

方程变换为 $u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\dfrac{2\mathrm{e}^u(u-1)}{1+2\mathrm{e}^u}$，分离变量有 $\dfrac{(1+2\mathrm{e}^u)\mathrm{d}u}{u+2\mathrm{e}^u}=\dfrac{-\mathrm{d}y}{y}$。

两边积分得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}(u+2\mathrm{e}^u)}{u+2\mathrm{e}^u}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$，$\ln\left|u+2\mathrm{e}^u\right|=-\ln|y|+\ln|c|$，即 $u+2\mathrm{e}^u=\dfrac{c}{y}$，将 $u=\dfrac{x}{y}$ 代入，得原方程的通解为 $2y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+x=c$。

（3）解：两边分子、分母互换，转换为 y 是自变量，x 是因变量的一阶线性微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x-2y\text{，即}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=-2y$$

对应的齐次线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x$，分离变量有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}y$，两边积分得 $\ln|x|=y+\ln|c|$，由此得 $x=c\mathrm{e}^y$。变易常数 c，令 $x=u(y)\mathrm{e}^y$，代入原方程得 $(u'(y)\mathrm{e}^y+u(y)\mathrm{e}^y)-u(y)\mathrm{e}^y=-2y$。

于是

$$u'(y)=-2y\mathrm{e}^{-y}$$

$$u(y)=\int-2y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int2y\mathrm{d}\mathrm{e}^{-y}=2y\mathrm{e}^{-y}-2\int\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=2y\mathrm{e}^{-y}+2\mathrm{e}^{-y}+c\text{。}$$

得原方程的通解为 $x=(2y\mathrm{e}^{-y}+2\mathrm{e}^{-y}+c)\mathrm{e}^y=2y+2+c\mathrm{e}^y$。

或 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=-2y$，$p(y)=-1$，$f(y)=-2y$。

由公式得原方程的通解为

$$
\begin{aligned}
x &= e^{-\int p(y)dy}\left(\int f(y)e^{\int p(y)dy}dy + c\right) \\
&= e^{\int 1dy}\left(\int -2ye^{\int -1dy}dy + c\right) = e^{y}\left(\int -2ye^{-y}dy + c\right) \\
&= e^{y}\left(\int 2yde^{-y} + c\right) = e^{y}\left(2ye^{-y} + 2e^{-y} + c\right) = 2y + 2 + ce^{y}
\end{aligned}
$$

（4）解：两边分子、分母互换，转化为 y 是自变量，x 是因变量的一阶线性微分方程为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos y\sin 2y - x\sin y}{\cos y} = \sin 2y - x\tan y \text{，即} \frac{dx}{dy} + (\tan y)\cdot x = \sin 2y$$

对应的齐次线性方程 $\dfrac{dx}{dy} = -(\tan y)\cdot x$，分离变量有 $\dfrac{dx}{x} = -\tan y\,dy$。两边积分得 $\ln|x| = \ln|\cos y| + \ln|c|$，由此得 $x = c\cos y$。

变易常数 c，令 $x = u(y)\cos y$，代入原方程得

$$(u'(y)\cos y + u(y)(-\sin y)) + u(y)\sin y = \sin 2y$$

于是 $u'(y) = 2\sin y$， $u(y) = -2\cos y + c$。

得原方程的通解为 $x = (c - 2\cos y)\cos y$。

（5）解：将 x 视为 y 的函数，则方程为一阶线性微分方程为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1-2y}{y^2}x = 1$$

对应的齐次线性方程 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2y-1}{y^2}x$，分离变量有 $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{2y-1}{y^2}dy$。

两边积分得 $\ln|x| = \ln y^2 + \dfrac{1}{y} + \ln|c|$，由此得 $x = cy^2e^{\frac{1}{y}}$。

变易常数 c，令 $x = u(y)y^2e^{\frac{1}{y}}$，代入原方程得

$$\left(u'(y)y^2e^{\frac{1}{y}} + u(y)(2y-1)e^{\frac{1}{y}}\right) + u(y)(1-2y)e^{\frac{1}{y}} = 1$$

于是

$$
\begin{aligned}
&u'(y) = y^{-2}e^{\frac{1}{y}} \\
&u(y) = \int y^{-2}e^{-\frac{1}{y}}dy = \int e^{-\frac{1}{y}}d\left(-\frac{1}{y}\right) = e^{-\frac{1}{y}} + c
\end{aligned}
$$

得原方程的通解为 $x = \left(e^{-\frac{1}{y}} + c\right)y^2e^{\frac{1}{y}} = y^2 + cy^2e^{\frac{1}{y}}$（及 $y = 0$）。

2．解：设所求曲线方程为 $y = f(x)$，则其上任一点 (x, y) 处切线的斜率为 y'，此点与原点的连线的斜率为 $\dfrac{y}{x}$，依题意有 $y'\cdot\dfrac{y}{x} = -1$。

分离变量有 $ydy = -xdx$，解得 $x^2 + y^2 = c$。将 $x = 0$， $y = 1$ 代入上式得 $c = 1$，从而所求的曲线方程为 $x^2 + y^2 = 1$。

3．解法一：$y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$为一个阶线性微分方程。

对应的齐次线性方程$y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=0$，分离变量有$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}$

两边积分得$\ln|y|=-\ln|\arcsin x|+\ln|c|$，由此得$y=\dfrac{c}{\arcsin x}$。

变易常数c，令$y=\dfrac{u(x)}{\arcsin x}$，代入原方程得

$$\left(\frac{u'(x)}{\arcsin x}-\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}\cdot(\arcsin x)^2}\right)\arcsin x+\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}=1$$

于是$u'(x)=1$，$u(x)=x+c$。得原方程的通解为$y=\dfrac{x+c}{\arcsin x}$。

把$x=\dfrac{1}{2}$，$y=0$代入上式得$c=-\dfrac{1}{2}$，从而所求的曲线方程为$y\arcsin x=x-\dfrac{1}{2}$。

解法二：整理方程得$y'+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}y=\dfrac{1}{\arcsin x}$，$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}$，$f(x)=\dfrac{1}{\arcsin x}$。

由公式得原方程的通解为$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)$

$$=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{\arcsin x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]$$

$$=\frac{1}{\arcsin x}(x+c)$$

把$x=\dfrac{1}{2}$，$y=0$代入上式得$c=-\dfrac{1}{2}$，从而所求的曲线方程为$y\arcsin x=x-\dfrac{1}{2}$。

4．（1）解：令$x+y=u$，则原方程化为

$$x\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1\right)+x+\sin u=0\text{，即 }x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\sin u$$

分离变量有$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sin u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分得$\ln|\csc u-\cot u|=-\ln|x|+\ln|c|$。

即$\csc u-\cot u=\dfrac{c}{x}$，将$u=x+y$代入，得原方程的通解为$\csc(x+y)-\cot(x+y)=\dfrac{c}{x}$。

（2）解：令$x-y=u$，则原方程化为

$$1-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+1\text{，即 }\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{u}$$

分离变量有$u\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$，两分积分得$\dfrac{1}{2}u^2=-x+c_1$。

即$u^2=-2x+c$，将$u=x-y$代入，得原方程的通解为$(x-y)^2+2x=c$。

（3）解：令 $u=x^2+y^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2x=\mathrm{e}^{\frac{u}{x}}+\frac{u}{x}-2x\text{，即 }\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\frac{u}{x}}+\frac{u}{x}$$

再令 $v=\dfrac{u}{x}$，则 $u=vx$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=v+x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，方程变换为 $v+x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^v+v$，即 $x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^v$。

分离变量为 $\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分得 $-\mathrm{e}^{-v}=\ln|x|+c$。

将 $u=x^2+y^2$，$v=\dfrac{u}{x}$ 代入，得原方程的通解为 $-\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{x}}=\ln|x|+c$

5．解：对 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$ 两边关于 x 求导得

$$f'(x)+2f(x)=2x\text{，即 }y'+2y=2x$$

这是一个一阶线性微分方程，其通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=x-\frac{1}{2}+c\mathrm{e}^{-2x}$$

因为 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$，当 $x=0$ 时，满足 $f(0)=0$。代入通解，有 $0=-\dfrac{1}{2}+c$，得 $c=\dfrac{1}{2}$。因此，所求函数为 $f(x)=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$。

6．解：对 $\int_0^x[2f(t)-1]\mathrm{d}t=f(x)-1$，两边关于 x 求导得

$$2f(x)-1=f'(x)\text{，即 }y'-2y=-1$$

这是一个一阶线性微分方程，其通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\left(\int -\mathrm{e}^{\int -2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\frac{1}{2}+c\mathrm{e}^{2x}$$

因为 $\int_0^x[2f(t)-1]\mathrm{d}t=f(x)-1$，当 $x=0$ 时，满足 $f(0)=1$。代入通解，有 $1=\dfrac{1}{2}+c$，得 $c=\dfrac{1}{2}$。因此，所求函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{2x})$。

7．解：由于 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)r\mathrm{d}r$，所以有 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\displaystyle\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)r\mathrm{d}r$，两边关于 t 求导得

$$f'(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)\text{，即 }f'(t)-8\pi tf(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}$$

这是一个关于 $f(t)$ 的一阶段性微分方程，其通解为

$$f(t)=\mathrm{e}^{\int 8\pi t\mathrm{d}t}\left(\int 8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}\mathrm{e}^{\int -8\pi t\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+c\right)=(4\pi t^2+c)\mathrm{e}^{4\pi t^2}$$

因为 $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}r\right)r\mathrm{d}r$ 。当 $t=0$ 时，满足 $f(0)=1$ 。代入通解，有 $c=1$ 。因此，所求函数为 $f(t)=(4\pi t^2+1)\mathrm{e}^{4\pi t^2}$ 。

8．解： $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\mathrm{e}^x\sin y,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(u)\mathrm{e}^x\sin y+f''(u)\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\mathrm{e}^x\cos y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ $f'(u)\mathrm{e}^x\sin y+f''(u)\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y$ 。

代入原方程，得 $f''(u)-f(u)=0$ 。解方程，得 $f(u)=c_1\mathrm{e}^u+c_2\mathrm{e}^{-u}$ ，其中 c_1 ， c_2 为任意常数。

《微积分（三）》课程期中考试样卷（一）答案

一、1.（1） $Axy=(1,2,-3)$，（2） $P(-1,1,1)$，

2.（1） $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=-3$，（2） $\alpha=150°$。

3.（1） $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-1$，（2） $k=\dfrac{21}{10}$。

4． $x+2y+3z=14$。

二、1.（1）3；（2）0。

2． $f_x'(2,0)=\dfrac{\pi}{2}+1$； $f_y'(2,0)=0$。

3． $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$。

4． $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{3x^2z+y^2}{\mathrm{e}^z+x^3}$，

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-2$$

5． $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\dfrac{1}{y}+f_2'\cdot 2x$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^3}f_{11}''-2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)f_{12}''-4xyf_{22}''-\frac{1}{y^2}f_1'$$

6．略。

7． -1。

三、提示： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{xyf_1'+\dfrac{yz}{x}f_2'}{xf_1'+yf_2'}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xyf_2'+\dfrac{xz}{y}f_1'}{xf_1'+yf_2'}$。

《微积分（三）》课程期中考试样卷（二）答案

一、1．$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy-y^2$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x-2y$。

2．$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}+y^2(1+xy)^{y-1}$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}+(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$；

$\mathrm{d}z|_{(1,1)}=\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\left(\frac{3}{2}+2\ln 2\right)\mathrm{d}y$。

3．$\frac{\partial z}{\partial x}=(1+x+y)^{xy}\left[y\ln(1+x+y)+\frac{xy}{1+x+y}\right]$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=(1+x+y)^{xy}\left[x\ln(1+x+y)+\frac{xy}{1+x+y}\right]$。

4．$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8$；

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{-8,-5,1\}$；

$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\arccos\frac{8}{\sqrt{154}}$。

二、1 极大值点 $(-4,-2)$，极大值 $f(-4,-2)=8\mathrm{e}^{-2}$。

2．$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf(\mathrm{e}^{x+y})+(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x+y}f'$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=2yf(\mathrm{e}^{x+y})+(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x+y}f'$；

$\mathrm{d}z=(2xf(\mathrm{e}^{x+y})+(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x+y}f')\mathrm{d}x+(2yf(\mathrm{e}^{x+y})+(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x+y}f')\mathrm{d}y$。

3．$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1'+y^2f_2'$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_1'+2xyf_2'$。

4．$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-\mathrm{e}^z}{(z-1)(\mathrm{e}^z-xy)^2}$。

5．$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_1'+2f_2'+4x^2f_{11}''+8x^2f_{12}''+4x^2f_{22}''$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f_1'-2f_2'+4y^2f_{11}''-8y^2f_{12}''+4y^2f_{22}''$$。

6．$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2+z^2-2x}{2z-x^2-z^2}$；$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2+z^2}{2z-x^2-z^2}$。

7．$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_3'\cdot g_1'$；$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'+f_3'\cdot g_2'$。

8．$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x^2}$；$\frac{\partial z}{\partial y}=-\mathrm{e}^{y^2}$。

三、$\frac{\partial z}{\partial x}=f'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\varphi'$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''\cdot\varphi'$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''$，代入得证。

《微积分（三）》课程期中考试样卷（三）答案

一、1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+y^2(1+xy)^{y-1}$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$。

2. $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=-\dfrac{1}{2}$。

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot \mathrm{e}^{xy}y$；

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+2\mathrm{e}^{xy}(x^2-y^2)f_{12}''+xy\,\mathrm{e}^{2xy}f_{22}''+\mathrm{e}^{xy}(xy+1)f_2'$。

4. $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{\mathrm{e}^z+1}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^z+1}\mathrm{d}y$。

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\left(2x+\dfrac{1}{y}\right)$；

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)(2x+\dfrac{1}{y})+f'\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$。

6. 2。

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续。

$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{\Delta x^2}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}$，不存在。

同理 $f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\sqrt{\Delta y^2}\sin\dfrac{1}{\Delta y^2}}{\Delta y}$，不存在。

所以，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数都不存在。

8. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x^4}\cdot 2x$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\mathrm{e}^{y^4}\cdot 2y$。

9. $\mathrm{d}z=(f_1'2x+f_2'\cdot\varphi'\cdot y)\mathrm{d}x+(f_1'2y+f_2'\cdot\varphi'\cdot x)\mathrm{d}y$

10. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x^2+2xy-12y^2}{(2x+y)^2}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-9x^2+16xy+4y^2}{(2x+y)^2}$。

二、1. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=\dfrac{-(f_1'+f_2'\cos x)\varphi_3'}{\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}+f_3'$

2．$(2,-2)$ 为 $f(x,y)$ 的极大值点。$f_{极大}=f(2,-2)=8$ 。

3．$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{f_1'+f_3'\cdot g_1'}{f_2'+f_3'\cdot g_2'}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{g_1'f_2'-g_2'\cdot f_1'}{f_2'+f_3'\cdot g_2'}$

4．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$；

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+p(x)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}-p(y)$；则 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 。

《微积分（三）》课程期末考试样卷（一）答案

一、1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y\cdot\mathrm{e}^{x^2+y^2}$；$\mathrm{d}z=2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x+2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}y$

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$

3. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-9$；

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$；

$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{3\pi}{4}$。

4. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+2xf_2'$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2yf_1'-2xf_2'$。

5. $D=\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ 2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}\end{cases}$，变换后 $D=\begin{cases}2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2}\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$；

$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

二、1. $\mathrm{e}^z\mathrm{d}z=yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$

$\mathrm{d}z=\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}\mathrm{d}x+\dfrac{xz}{\mathrm{e}^z-xy}\mathrm{d}y$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z-xy},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{\mathrm{e}^z-xy}$

2. $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}xy\mathrm{d}y=\dfrac{1}{24}$

3. $y=(2\mathrm{e}^{x^2}+c)\mathrm{e}^{-x^2}$

4. $\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma$

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2(r^2-1)r\mathrm{d}r$

$=5\pi$

5. $\iint\limits_D\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$

$=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$

6. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot y$； $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''+(x+y)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$。

7. $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+x^2\mathrm{e}^x$。

8. $x-y-1=c\cdot\mathrm{e}^y$

9. $f(x)=2(x+1)\mathrm{e}^{2x}$

10. $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos}r^2\cdot r\mathrm{d}r=\dfrac{3}{2}\pi$

三、证明：$\dfrac{\partial z}{\partial z}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\dfrac{1}{x^2}$。

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{y^2}$$

$$\begin{aligned}\text{左边}&=x^2\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}+y^2\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{y^2}\\&=2\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\\&=2z\\&=\text{右边}\end{aligned}$$

《微积分（三）》课程期末考试样卷（二）答案

一、1．×；2． √；3． √；4． √；5． √。

二、6． $y = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x}$。

7． -1。

8． -1。

9．1。

10． $\dfrac{2\pi}{3}$。

11． -5，1。

12． $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{c}{2}$。

三、13． D 的面积 $s = 1$。

14． $\dfrac{\partial z}{\partial z} = (x^2 + y^2)^x \left(\ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2 + y^2} \right)$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (x^2 + y^2)^x \left\{ \left((\ln(x^2 + y^2)) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right)^2 + \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\}。$$

15．2。

16． $y'_{(1)} = -\dfrac{2}{\mathrm{e}}$。

17． $y = (1 + x)^2 (\sin x + c)$。

18． $y = 2\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-3x}$。

《微积分（三）》课程期末考试样卷（三）答案

一、1．$-\dfrac{2}{3}$；2．$\{4,-2,-1\}$；3．$\dfrac{1}{4}$；4．8；5．$4xy\varphi'$；6．$yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$；

7．$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

8．4π；9．$c_1+c_2\mathrm{e}^{4x}$；10．$-\ln|x|+c_1x+c_2$。

二、1．$\overrightarrow{M_1,M_2}=\{2,-2,1\}$，$\overrightarrow{M_1,M_2}=\left\{\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right\}$，即：$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}=\{-4,4,-2\}$。

2．（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=17$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$

（2）-16。

3．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xye^{x^2y+\frac{1}{y}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2-\dfrac{1}{y^2}\right)\mathrm{e}^{x^2y+\frac{1}{y}}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2y+4x^2y^2)\mathrm{e}^{x^2y+\frac{1}{y}}$

4．$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{V}{u^2+v^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}=-\dfrac{u}{u^2+v^2}$；

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y(y^2-x^2)}{x^4+3x^2y^2+y^4}$。

5．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+y^2f_2'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xyf_{12}''+2yf_2'+2xy^3f_{22}''$。

6．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3x^2}{y-3z^2}$；$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-z}{y-3z^2}$

7．$f(x,y)$ 在 $(2,-2)$ 处有极大值，$f(2,-2)=10$。

8．$\dfrac{4}{3}$。

9．π。

10．$\sqrt{1+y^2}-1=\ln x$。

11．$y=(x+1)(x+c)$。

12．$f(x,y)=x^2+y^2-2$。

反侵权盗版声明

举报电话：（010）88254396；（010）88258888
传　　真：（010）88254397
E-mail：　dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市海淀区万寿路 173 信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036